ΑΛΓΕΥΡΑ LIE

$$\left.\begin{array}{l} SO(n) \longrightarrow T_{SO(n)} = so(n) \\ U(n) \longrightarrow T_{U(n)} = u(n) \\ SU(n) \longrightarrow T_{SU(n)} = su(n) \\ Sp(n) \longrightarrow T_{Sp(n)} = sp(n) \end{array}\right\}$$ Πραγμ. διανυσματικοί χώροι.

$M_n(\mathbb{R})$ δ.χ. κ' πραγματική άλγεβρα

Ερωτημα $so(n)$ είναι πραγματική άλγεβρα;

$n=2$ $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \in so(n)$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} a \neq 0 \\ \notin so(2) \end{array} \text{ άρα}$$

Δεν έχουν γινόμενο (η πράξη του γινομένου δεν είναι κλειστή) στις $so(n)$, $su(n)$, $sp(n)$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα "γινόμενο" ως εξής:

$so(n) \times so(n) \longrightarrow so(n)$

$(A, B) \longmapsto [A, B]$ Lie bracket $= AB - BA$

Για να είναι καλά ορισμένη η πράξη, πρέπει $[A, B] \in so(n)$

$[A, B] + [A, B]^t = 0$

$AB - BA + (AB - BA)^t = AB - BA + (AB)^t - (BA)^t = AB - BA + B^tA^t - A^tB^t \overset{A,B \in so(n)}{\underset{\substack{A=-A^t \\ B=-B^t}}{=}} AB + BA - BA - AB = 0$, άρα η πράξη είναι καλά ορισμένη

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $[A, A] = AA - AA = 0$

2) $[A, B] = AB - BA$, $[B, A] = BA - AB$ $\Big\}$ $[A, B] = -[B, A]$

3) $[A + A', B] = (A + A')B - B(A + A') = AB + A'B - BA - BA' = [A, B] + [A', B]$

4) $[A, B + B'] = [A, B] + [A, B']$

5) $[rA, B] = (rA)B - B(rA) = r[A, B]$

$[A, rB] = r[A, B]$

6) ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ JACOBI

$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$

$A[B, C] - [B, C]A + B[C, A] - [C, A]B + C[A, B] - [A, B]C =$

$\cancel{ABC} - \cancel{ACB} - \cancel{BCA} + \cancel{CBA} - \cancel{BAC} + \cancel{BCA} + \cancel{ACB} - \cancel{CAB} + \cancel{CAB} - \cancel{CBA} - \cancel{ABC} + \cancel{BAC} = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος $\mathfrak{g}$ θα καλείται άλγεβρα Lie, αν είναι εφοδιασμένος με ένα γινόμενο

$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες 1)-6).

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι διανυσματικοί χώροι $so(n)$, $su(n)$, $sp(n)$ με το γινόμενο $[A, B] = AB - BA$ είναι άλγεβρες Lie

Αν $\mathfrak{g}$ είναι άλγεβρα Lie, τότε αυτή έχει διάσταση $\dim \mathfrak{g}$ σαν διανυσματικός χώρος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για διάσταση $1 \Rightarrow \mathfrak{g} = \mathbb{R}$

Σαν διανυσματικός χώρος το $\mathbb{R}$ είναι αυτό που γνωρίζουμε με τις συνήθεις πράξεις.
Θα εξετάσουμε το Lie bracket.
$\mathbb{R} = \langle 1 \rangle \quad [r,s] \overset{5)}{=} r\cdot s[1,1] = 0$
Άρα το Lie bracket για διάσταση 1 είναι 0.

ΠΡΟΤΑΣΗ
Κάθε πραγματικός διανυσματικός χώρος γίνεται άλγεβρα Lie με τετριμμένο γινόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
Για διάσταση 2 άλγεβρες Lie
$\dim g = 2 \Rightarrow g \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$

Η g θα έχει μια βάση η οποία θα αποτελείται από δύο στοιχεία e_1, e_2. Λόγω των ιδιοτήτων 3) κ' 4) αρκεί να οριστούν τα γινόμενα $[e_1,e_2] = -[e_2,e_1]$
Αν υποθέσουμε ότι $[e_1,e_2] = 0$, τότε έχουμε μια τετριμμένη άλγεβρα Lie διάστασης 2.
$[e_1,e_2] \neq 0 \quad [e_1,e_2] \in g = \langle e_1, e_2 \rangle \Rightarrow [e_1,e_2] = ae_1 + be_2$ με $a, b \in \mathbb{R}$
Ταυτότητα Jacobi
$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$

$[e_1,[e_1,e_2]] + [e_1,[e_2,e_1]] + [e_2,\underbrace{[e_1,e_1]}_{0}] = 0$

$[e_1,[e_1,e_2]] + [e_1, -[e_1,e_2]] = 0$

$[e_1,[e_1,e_2]] = [e_1,[e_1,e_2]]$

Όλες οι μη τετριμμένες άλγεβρες Lie διάστασης 2 είναι ισόμορφες μεταξύ τους.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ μεταξύ δυο αλγεβρών Lie θα είναι ισομορφισμός αλγεβρών Lie, αν είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και σέβεται το Lie bracket

$$\varphi([A,B]) = [\varphi(A), \varphi(B)]$$

Παράδειγμα για διάσταση 3

$$so(3) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$ αυτή είναι άλγεβρα Lie διάστασης 3.

$$\downarrow$$

$\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k \rangle$ άλγεβρα Lie

$$so(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$i \qquad j \qquad k$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad [i, j] = -k$$

Άρα $so(3) \to \mathbb{R}^3 = \langle i, j, k \rangle$ άλγεβρα Lie με γινόμενο
$[i,j] = -k$, $[i,k] = j$, $[j,k] = i$

Ομάδες Lie

$M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ μετρικός χώρος.

G ομάδα $\subseteq M_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $G \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$

Με τη λέξη χώρος θα εννοούμε ένα υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^m$

Ορισμός

Ένας χώρος X καλείται πολλαπλότητα διάστασης n αν $\forall x \in X$ $\exists U$ ανοιχτή περιοχή του X ώστε το U να είναι ομοιομορφικό με κάποια μπάλα $B_r(\bar{0})$ του $\mathbb{R}^n$

Δηλ. $\exists \varphi_U \; U \xrightarrow[\text{ομ.}]{\simeq} B_r(\bar{0})$

Το ζεύγος (U, φ_U) καλείται χάρτης

Αν θεωρήσουμε το σύνολο όλων των χαρτών καλείται άτλαντας.

Πρόταση

Μια ομάδα πινάκων διάστασης n είναι μια n-διάστατη πολ/τα

Ορισμός

Μια πολ/τα καλείται κλειστή, αν είναι συμπαγής.

Παράδειγμα

$GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι κλειστή (Άσκηση 1 προηγ. μαθήματος)

$O(n)$ $AA^t = I$, είναι κλειστή

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω N και M κλειστές πολλ/τες διάστασης n με $N \subseteq M$. Αν η M είναι τροχιακά συνεκτική, τότε $N = M$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\mathbb{R}$ πολ/τα διάστασης n
$(0,1)$ πολ/τα διάστασης n
κ' $\mathbb{R} \neq (0,1)$
$(0,1) \subseteq \mathbb{R}$

(δεν είναι κλειστό) → τροχιακά συνεκτικά κ' τα δύο αλλά δεν είναι συμπαγής

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής απεικόνιση. Η f θα καλείται διαφορίσιμη (λεία) αν όλες οι ανώτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και οι αντίστοιχοι χάρτες (U, φ_U) είναι διαφορομορφισμοί. Τότε η X θα καλείται διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

$x \in X$, $x \in U \cap V$ ανοικτά
(U, φ_U) (V, φ_V), $x \in U \cap V \subseteq X$ ανοιχτό

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[d, "\varphi_U|_{U\cap V}"', "\cong"] \arrow[dr, "\varphi_V|_{U\cap V}", "\cong"'] & \\
\varphi_U(U\cap V) \subseteq B_r(\bar{0}) \arrow[r, dashed] & \varphi_V(U\cap V) \subseteq B_r(\bar{0})
\end{tikzcd}$$

διαφορομορφισμός

$$\varphi_U(U\cap V) \xrightarrow[\varphi_V \varphi_U^{-1}]{\cong} \varphi_V(U\cap V)$$

Το παρακάτω διαγ. μας λέει ότι οι χάρτες είναι συμβιβαστοί (εξαρτημένοι) μεταξύ τους

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω G διαφορίσιμη πολ/τα, η οποία είναι και ομάδα. Θα καλείται ομάδα Lie αν η πράξη της ομάδας $\mu: G \times G \to G$ είναι διαφορίσιμη και η απεικόνιση $\varphi: G \to G$ με τύπο $\varphi(g) = g^{-1}$ είναι επίσης διαφορίσιμη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ Αν X και Y είναι διαφορίσιμες πολ/τες, τότε και το καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ είναι επίσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Οι ομάδες $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ με τις προφανείς $(+)$ πράξεις είναι ομάδες Lie.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι ομάδες των πινάκων είναι ομάδες Lie.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με την πρόσθεση των πινάκων είναι προφανές.
Με το γινόμενο των πινάκων θεωρούμε τις ομάδες
$O(n, \mathbb{K}) \leq Gl(n, \mathbb{K})$ με $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$

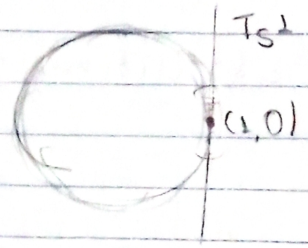
$Gl(n, \mathbb{K})$ είναι ανοιχτό υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^m$.
Η πράξη του πολ/μου των πινάκων είναι πολυωνυμική συνάρτηση.
Άρα είναι διαφορίσιμη.
Η πράξη που δίνει τον αντίστροφο πίνακα είναι ρητή πολυωνυμική συνάρτηση. Άρα διαφορίσιμη. Οπότε, η $Gl(n, \mathbb{K})$ είναι ομάδα Lie.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Εστω G και G' δύο ομάδες Lie. Αυτές θα καλούνται τοπικά ισόμορφες, αν $\exists$ ανοιχτές περιοχές των ταυτοτικών στοιχείων U_G και $V_{G'}$ και ομοιομορφισμός $\varphi: U_G \to V_{G'}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

1) Οι ομάδες Lie $\mathbb{R}$ και S^1, $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}^*$ κ' $S^1 \leq \mathbb{C}^*$ δεν είναι ισόμορφες, καθώς $\mathbb{R}$ όχι συμπαγής, S^1 συμπαγής. Είναι όμως, τοπικά ισόμορφες.



Ορίζουμε τη $\varphi: U^{\subseteq \mathbb{R}} \longrightarrow V^{\subseteq S^1}$ με

$\varphi(t) = e^{it}$ και $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

$\varphi(t+t') = e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'} = \varphi(t)\varphi(t')$

2) $SU(2) \subseteq \mathbb{R}^4$ κ' $SO(3) \subseteq \mathbb{R}^3$ είναι τοπικά ισόμορφες.
↳ dim = 3 ↳ dim = 3

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν G_1 και G_2 είναι ομάδες Lie, τότε $G_1 \times G_2$ είναι επίσης ομάδα Lie.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω G_1 κ' G_2 ομάδες Lie και $\varphi: G_1 \to G_2$ ομομορφισμός ομάδων Lie τότε η $d\varphi: T_{G_1} \to T_{G_2}$ είναι απεικόνιση αλγεβρών Lie.